229. 伊藤氏ノ論文228ニツイテ

角　谷　静　夫（阪大）

伊藤氏ハ変域モ値域モ有限個領域 $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, n\}$ デアル任意ノ有限個ノ変数ノ函数 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p)$

（rモ任意ノ$\geqq 1$ナル整数）ハ$2(n+2)$個ノ函数$\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$, $f_k(x)\equiv k\ (k=0,1,2,\text{------},n)$, $\sigma(x,\lambda)=\delta_{x\lambda}(\lambda=0,1,2,\text{------},n)$ヲ有限回組合ハセルコトニヨッテ得ラレルコトヲ証明サレタ.

コヽニ

$$\psi_1(x,y)=x\times y,\quad y=0\text{又ハ}1\text{ナルトキ}$$

$$\psi_2(x,y)=x+y,\quad x=0\text{又ハ}y=0\text{ ナルトキ}$$

デアル。

次ニコレラノ$2(n+2)$個ノ函数ハ適當ナ一ツノ函数$\varphi(x,y)$ノ有限回ノ組合セニヨッテ得ラレルコトヲ証明シヨウ。*

$n\geqq 3$ナル場合

$\varphi(x,y)$ヲ次ノ表ニヨッテ定義スル。（空白ノ所ハ定義サレテナクテモヨイ）

---

* 置換群ノ考ヘヲ用ヒルト$\varphi(x,y)$ヲ適當ニ定義スレバ、一変数ノ函数ハスベテ（コレハ$(n+1)^{n+1}$個アル）$\varphi(x,y)$ノ有限回ノ組合ハセニヨッテ表ハセルコトハ容易ニワカルが（伊藤氏ノ論文最後ノ例参照）、コノ方法デハ$\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$ヲ$\varphi(x,y)$ニテ表ハスノが難カシイ。

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	⋯	$n-2$	$n-1$	n
0	1	2	3	4	5	⋯	$n-1$	n	0
1	2	2	1						0
2	3	0	3						0
3	4		0	4					0
4	5			0	5				
⋮	⋮				0	⋱			⋮
$n-2$	$n-1$					0	$n-1$		0
$n-1$	n						0	n	0
n	0							0	0

$g_1(x) \equiv \varphi(x,x) = x+1$ （$n+1=0$ トオク。一般ニ mod.$(n+1)$ ニテ考ヘルコトニスル）デアルカラ $g_1(x)$ ヲ iterate スルコトニヨリ $g_k(x)=x+k$ ハ $\varphi(x,y)$ ニヨツテ表ハセル。

特ニ $k=n$ トオケバ

$$g_n(x) \equiv g_{-1}(x) \equiv g_1^{-1}(x) = x-1$$

トナル。コレト $\varphi(x,y)$ ノ定義ヨリ

$$\psi_1(x,y) = \varphi(g_{-1}(x),\ g_{-1}(y))$$

$$\psi_2(x,y) = g_{-1}\{\varphi(x,y)\}$$

ナルコトハ明カデアル。次ニ

$$h(x) \equiv \varphi(g_1(x), x)$$

ハ $h(0)=2$, $x \neq 0$ ナルトキ $h(x)=0$ デアルカラ

$$\sigma(x,0)=\varphi(h(x), g_{-1}\{h(x)\})$$

トナル。一般ニ

$$\sigma(g_{-1}(x), \lambda-1)=g(x,\lambda) \qquad \lambda=1,2,\cdots\cdots,n$$

デアルカラ $\sigma(x,\lambda)$ $(\lambda=0,1,2,\cdots\cdots,n)$ ハスベテ表ハセル。

更ニ

$$\sigma(\sigma(x,0),2) \equiv 0 \equiv f_0(x)$$

デアリ、一般ニ

$$g_1\{f_{k-1}(x)\}=f_k(x) \qquad k=1,2,\cdots\cdots,n$$

デアルカラ $f_k(x)$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots,n)$ ハスベテ表ハセル。

コレニヨツテ $n \geqq 3$ ナル場合ハ解決シタ。$n=1$ ノトキハ伊藤氏ガ既ニ解決サレタカラ $n=2$ ノトキヲヤレバヨイ。$\varphi(x,y)$ ヲ次ノ表ニヨツテ定義スル。

$x \backslash y$	0	1	2
0	1	2	0
1	2	2	0
2	0	0	0

$n \geqq 3$ ナル場合ト異ルノハ $h(x)$ ヨリ $\sigma(x,0)$ ヲ作ル所ダ

ケデアル。コレハ

$$\sigma(x,0)=g_1[h\{h(x)\}]$$

トオケバヨイコトハ明カデアルカラ、$n=2$ ナルトキモ解決シタ。

伊藤氏ノ定理ト組合ハセレバ結局次ノ定理ヲ得ル。

定理。 変域モ値域モ有限個領域 $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, n\}$ ナル有限個変数ノ任意ノ函数 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r)$ (r ハ任意ノ正整数) ハ唯一ツノ適當ナ函数 $\varphi(x, y)$ ノ有限回ノ組合ハセニヨツテ表ハスコトガ出來ル。